LES ONES EN ELS LIQUIDS; PROPAGACIÓ EN ELS CANALS

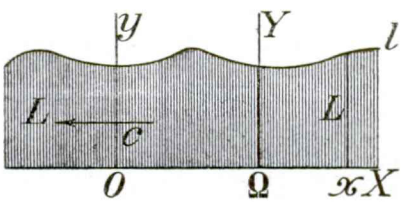
I. QUÈ ÉS UN MOVIMENT PER ONES?

No puc donar una definició general del moviment d'un líquid per ones que, tot comprenent els casos en què per una o altra raó siguin aquelles físicament tangibles, assoleixi la deguda precisió matemàtica. M'afiguro que aquest inconvenient deriva de la naturalesa mateixa del fenomen, en el sentit que, si es vol generalitzar cercant d'estendre la consideració a tots els tipus, les característiques de major relleu van esfumant-se, i s'acaba per incloure tots els moviments dinàmicament possibles.

Concretant-se a una orientació, podria qualificar-se de moviment per ones en un fluid aquell en què els desplaçaments de les partícules materials determinen un moviment molt més visible i rellevant d'un cert element característic : per exemple, el d'una superfície lliure o el d'una superfície de separació de dos règims diversos. Però ni això tan sols presenta caràcter netament discriminant, com pot inferir-se d'un exemple clàssic.

Sigui un canal rectilini de fons horitzontal i parets verticals, i consideri's el cas típic en què el moviment del líquid pesant contingut en el canal, vg., aigua, és parallel al llarg, essent idèntic per a totes les seccions longitudinals del canal, és a dir, en tots els plans paral·lels al llarg.

El fenomen pot ser estudiat aleshores en dues dimensions, considerant tan sols una secció longitudinal. En ella el fons serà una recta horitzontal ΩX, i el perfil lliure superior serà una línia l, variable, en general, amb el temps, mes no massa diferent d'una recta horitzontal $Y = h$, almenys en condicions ordinàries. Aquesta recta



horitzontal seria la línia de nivell en condicions estàtiques, essent h la profunditat mitja del canal. Sigui L el camp del moviment, és a dir, la faixa indefinida (variable també amb el temps, en general) que queda compresa entre el fons i la línia l.

Amb aquestes suposicions, el problema general de la Hidrodinàmica pels dits moviments plans, pot formular-se així : En l'instant inicial $t = o$ es dóna la pertorbació, és a dir, la configuració de l i la distribució de les velocitats en L. Es demana la successió del moviment i la llei segons la qual varia l.

Això mateix, salvant especificacions qualitatives, és aplicable al problema general de les ones en canal, anomenant-se propagació per ones la llei que regeix el desenrotllament del moviment a partir d'una pertorbació inicial determinada. En les primeres recerques de Lagrange es troba adoptat aquest punt de vista, que mira directament a l'integral general, atenent d'una manera incidental a les aplicacions particulars que retreuen el moviment per ones en el sentit comú de la paraula. Lagrange redueix el problema al de l'equació de les cordes vibrants despreciant l'acceleració vertical del moviment de les partícules fluides en front del valor de g (acceleració de la gravetat). L'aplicació més coneguda són les ones de marea. De semblant manera procediren Poisson i Cauchy, els quals abandonen ja la hipòtesi massa restrictiva sobre l'acceleració, i tracten d'una manera general dels petits moviments en canals de molt fons. Les ones s'ofereixen de manera indubtable, mes sense una demarcació sistemàtica on, per la mateixa naturalesa física de la qüestió, no ha de ser possible passar-se'n.

Així s'esdevé, vg., per a les anomenades ones d'emersió que corresponen a la hipòtesi d'un sòlid (un cos flotant, per exemple), que en un moment donat s'elimina, deixant un buit que és aviat reomplert d'aigua. En aquest ompliment, que, almenys en teoria, s'inícia instantàniament en tota la massa d'aigua, es formen depressions i inflaments del perfil lliure, que es propaguen al llarg del canal amb acceleració (no velocitat) sensiblement constant. Hi ha, efectivament, qualque cosa que es propaga; mes, encara que sigui un efecte important, no hi ha una llei nítida que ho reguli; llei que, en canvi, es troba en altres tipus no menys importants de moviment per ones.

Entre aquests tipus recordaré senzillament la propagació de discontinuïtats en el cas de fluids compressibles objecte d'estudi per part de Riemann, Hugoniot i Hadamard, i que aquest ha tractat sistemàticament.(1)

1. *Leçons sur la propagation des ondes*, París, Hermann, 1903.

2. ONES PROGRESSIVES DE TIPUS PERMANENT. CARÀCTERS ESSENCIALS.

Arribo al cas especial que ha de ser objecte de la nostra atenció. Serà el d'ones progressives de tipus permanent, és a dir, moviments del líquid en el canal en els quals el perfil lliure es trasllada sense alterar la forma amb una velocitat c mentre les partícules materials efectuen petites oscil·lacions amb velocitats locals de valor mig nul, ben lluny d'estar animades de velocitats comparables amb c.

Circumscrita així la noció d'ones de canal, procedirem al seu examen matemàtic.

Introduirem un sistema d'eixos fixos ΩXY, del qual l'eix ΩY sigui vertical i dirigit en l'aire, l'eix ΩX disposat en el fons δ amb la direcció positiva en sentit oposat al de la translació de l. Junt amb el sistema anterior, serà oportú introduir un segon sistema mòbil amb eixos Oxy solidaris de l i coincidents amb els fixos en l'instant $t = o$.

Entre les coordenades X, Y, i les x, y, d'un mateix punt, hi ha evidentment les relacions de pas

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} X = x - ct, \\ Y = y. \end{cases}$$

Siguin u i v les components (segons x, y o x, Y,) de la velocitat *relativa*, és a dir, la velocitat referida als eixos mòbils Oxy en el moviment d'una partícula material. Segons la llei del moviment relatiu, les components de la velocitat absoluta seran $u - c$ i v, les quals vindran referides al sistema ΩXY. La circumstància d'ésser el moviment material insignificant respecte del moviment del perfil lliure es tradueix en què

$$V_a = \sqrt{(u - c)^2 + v^2},$$

que és el valor de la velocitat absoluta, ha de ser una quantitat petita comparada amb c. Des del punt de vista matemàtic això és equivalent a què

$$\beta = \frac{V_a}{c} < 1; \qquad (2)$$

o d'altra manera (V_a essent variable), el límit superior d'aquesta relació β per tot el camp i per a tota la durada del moviment ha de ser inferior a la unitat.

I, per conseqüència, $u > 0$ i el límit inferior del valor de u és major que zero.

A priori és desconeguda la línia l, de la qual altra cosa no se sap sinó que no és gaire diferent d'una recta horitzontal, podent, per altra part, tenir una forma sinuosa, regular, etc. També són desconegudes les components u i v. Les condicions quantitatives que han de ser satisfetes (i que defineixen no ja una sola solució, sinó tota una categoria de solucions) són de dues espècies.

I. Cinemàtiques : Incompressibilitat, condicions en el fons i en el perfil lliure.

II. Dinàmiques : Equacions indefinides, valor constant de la pressió en l.

3. ONES TROCOIDALS DE GERSTNER LLUR INSUFICIÈNCIA COM A PROTOTIPUS DEL FENOMEN REAL.

Més endavant donarem forma explícita a les esmentades condicions després que hàgim circumscrit i precisat el que ha de ser objecte d'estudi. Entretant, i per justificar aquesta restricció de què parlem, recordaré que per als canals de fondària indefinida[1] és coneguda, fa ja més d'un segle, una solució particular, o, millor, una categoria ∞^1 de solucions particulars, que satisfà exactament les condicions I i II. Són les ones trocoidals de Gerstner i Rankine.[2] En elles el perfil lliure l és una trocoide, i les partícules d'aigua descriuen petites el·lipses, que són cada cop més aplenades a mesura que és major la fondària.

Del paràmetre de què depenen aquestes solucions pot disposar-se de manera que la pertorbació sigui més o menys accentuada i pugui convenir tant a les ones més petites com a les més grans onades. Si λ és la llargada de l'ona, és a dir, en el cas actual la distància entre punts homòlegs de la trocoide (pels quals la posició del punt generador ha donat amb el cercle en què es mou una volta completa entorn del centre), hi ha la relació següent:

$$c^2 = \frac{h\lambda}{2\pi};$$

essent g l'acceleració de la gravetat.

Les ones de Gerstner són permanents geomètricament, és a dir, l es trasllada sense alteració, rígidament lligada als eixos mòbils Oxy. També ho són cinemàticament, és a dir, que u i v, considerades amb referència a l'observador mòbil, com a funcions de x, y, t, depenen de x, y, mes *no* de t, i el moviment té, per tant, caràcter permanent respecte de l'observador.

1. És a dir, que el fons és a l'infinit. En la figura 1, el camp L no tindria altre límit que l, i els orígens Ω i O es trobarien sobre una horitzontal qualsevol.

2. Vegi's, vg., Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III (tercera edició), pàgs. 508-515; o bé Lamb, *Hydrodynamics* (quarta edició), Cambridge, 1916, art. 251.

Per a les ones trocoidals es pot formular de manera precisa la intuïció física fonamental (moviment del perfil sense arrossegada de matèria), que tradueix la desigualtat

$$(2) \qquad \beta = \frac{V_a}{c} < 1.$$

El transport global de matèria és, efectivament, nul, o, dit amb altres paraules, és igual a zero el valor mitjà de la massa líquida que passa a través d'una secció determinada del canal.

La solució de Gerstner, posseint tan falagueres prerrogatives, mereix certament un lloc d'honor en tots els tractats d'Hidrodinàmica, i fins en les aplicacions hidràuliques i nàutiques se'n fa gran ús com a base de primera aproximació per a apreciar d'una o altra manera les múltiples influències pertorbadores que es presenten en la pràctica. Mes té una condició limitativa, i presenta demés un greu inconvenient, que fa que la importància que li hagi estat atribuïda sols pugui considerar-se provisional a falta de cosa millor.

La limitació és que el fons hagi de trobar-se a il·limitada distància vertical. I l'inconvenient greu, que el moviment és rotacional, o sia en terbolí.

És ben sabut que un líquid perfecte sota l'acció de forces conservadores no pot pendre més que moviments irrotacionals. Perquè es puguin produir ones com les de Gerstner no hi ha més remei que imaginar una acció especial del vent que estableixi un moviment laminar de sentit oposat a la pertorbació i ràpidament esmorteït de la superfície cap avall (Stokes). A partir d'aquest estat de moviment laminar (en què la rotació de les partícules sigui la convenient per a les ones de Gerstner), es pot arribar a les ones trocoidals per l'acció de forces conservadores. Mes això constitueix una generació molt especial i estranya perquè pugui considerar-se, encara que sigui solament d'una manera aproximada, plausible i aplicable en tots els casos en què s'observen ones propagant-se sense alteració sensible de tipus.

Convé, doncs, cercar altres ones progressives de tipus permanent que, acostant-se en simplicitat a les de Gerstner, siguin degudes a vibracions irrotacionals de les partícules líquides.

4. ONES IRROTACIONALS.

En primera aproximació és possible un tractament bastant senzill. Ho podrem comprovar en deduir les cèlebres ones senzilles d'Airy, com a conseqüència immediata de l'equació funcional que, com tindré l'honor de demostrar, tradueix de la manera més completa i concisa les condicions del problema per a un canal de fondària qualsevol.

Reprenent, mentrestant, les condicions sistemàtiques indicades, referirem les fórmules als eixos mòbils Oxy, respecte dels quals, per hipòtesi, L (camp del moviment relatiu) és constant. Essent el moviment irrotacional, existeix un potencial de velocitats regular dintre L i tal que

$$d\varphi = udx + vdy. \tag{3}$$

Per la condició d'incompressibilitat, φ és harmònica, o sia

$$-vdx + udy$$

és una diferencial exacta. Introduint la funció associada ψ (funció de corrent) mitjançant

$$d\psi = -vdx + udy, \tag{4}$$

vénen definides per (3) i (4) les funcions φ i ψ, salvant la constant arbitrària per a cada una. Aquestes constants seran determinades si admetem $\varphi = \psi = o$ en el punt O.

Essent el camp L simplement connex, les dues funcions φ i ψ queden així determinades unívocament.

Observi's que l està constituïda sempre per les mateixes partícules, com a línia que és de perfil de l'ona. I, demés, per hipòtesi, és solidària dels eixos Oxy. Per això és, alhora, trajectòria o línia de corrent de totes les partícules que l'integren. En ella, doncs, $\psi =$ constant.

Aquesta mateixa condició val per al fons ($y = o$), en el qual, ultra ser constant, té el valor zero en virtut d'haver suposat $\psi = o$ en el punt O.

Sigui q el valor de la constant ψ en l:

$$\psi = q\,, \tag{5}$$

Si la densitat del líquid es suposa igual a 1, la constant q és l'aiguaflux relatiu del canal; degut, no a un transport real de les partícules, sinó al fet de moure's els eixos de referència amb la velocitat $-c$, amb la qual cosa la velocitat relativa de ço que està en repòs absolut val c. Si $x =$ constant representa una secció vertical l'aiguaflux o quantitat d'aigua que travessa la dita secció, en la unitat de temps i per a una amplada del canal igual a 1, és

$$\int u dy$$

des del fons a l, al llarg de la vertical $x =$ const. La (4) en què $dx = o$ demostra que la valor de la integral és, efectivament, q.

És quasi inútil observar que, pel caràcter qualitatiu del moviment per ones, q és certament $> o$, perquè el líquid té un moviment absolut molt petit, i, per tant, en el moviment relatiu respecte de Oxy, la velocitat horitzontal de les partícules no serà molt diversa de c.

Convé examinar el caràcter analític de ψ dins L. En primer lloc, del fet d'ésser u i v finites i contínues en el canal (fins allunyant-se'n indefinidament en un sentit o altre) es desprèn que ψ és regular a distància finita (per 3) i al mateix temps harmònica (3 i 4). És també finita en l'infinit; doncs sigui P un punt de L d'abscissa qualsevol : sempre es pot aconseguir a partir d'un punt Q del fons o bé de l recorrent un camí finit no més gran que l'ordenada màxima de l. Com que ψ_Q és constant, i $\psi_P - \psi_Q = \int(-vdx + udy)$, encara que P s'allunyi indefinidament, ψ_P es conserva finita. Demés, essent funció harmònica que pren en el contorn els valors o (al fons) i q (a l), romandrà sempre compresa entre o i q dins L. Una funció així depèn de x, y, mes no de t. I, per tant, també u i v les components de la velocitat, de manera que el moviment relatiu als eixos Oxy *té necessàriament caràcter estacionari*.

És interessant observar que fins aquí hem admès tan sols que el perfil lliure es trasllada sense canviar de forma. Basta, doncs, això per a deduir-ne que, respecte del perfil lliure, o, millor, respecte d'un sistema Oxy d'eixos solidaris del perfil lliure, el moviment és permanent.

És clar que també el potencial de velocitats definit per (3), amb la condició inicial de ser $\varphi = o$ en O, resulta harmònic i funció solament de x, y. Mes la φ, en canvi, a diferència del que passa amb la ψ, es fa infinita amb x, convergint a $+\infty$ o a $-\infty$ segons es consideri el sentit positiu o negatiu.

5. CARACTERÍSTICA DE MASSA.

Per establir aquesta propietat de φ de la manera més senzilla, amb l'avantatge de trobar alhora el terme asimptòtic, traduirem analíticament la característica de massa. D'una manera qualitativa n'havem hagut compte en considerar petita la velocitat absoluta de les partícules comparada amb c.

Expressem que *per a les capes profundes no hi ha transport global mitjà.*

A dir veritat, hom podria ésser temptat de pensar que el veritable moviment per ones no és altra cosa que una apariència, en el sentit de negar tot transport de conjunt, i quedar reduït a oscil·lacions de les partícules al voltant de posicions fixes en l'espai. Mes aquesta definició fora massa restrictiva, i fins en contradicció amb la naturalesa irrotacional del moviment, com va ser indicat ja per Lord Rayleigh amb suggestiu argument, si bé no del tot rigorós.

És, per tant, indicat exigir sols que el petit transport de massa que acompanya la propagació per ones, en cas d'existir, sigui degut exclusivament a les desigualtats superficials : els estrats profunds no hi contribuirien per a res. Per això considerem com a característica de massa l'absència de transport en les capes profundes.

Sigui dy un element de la vertical en els eixos mòbils Oxy. El flux en el sentit positiu Ox, referit a les unitats de temps i amplada del canal, és

$$udy\,.$$

Si es tractés d'una vertical fixa en l'espai, caldria substituir u la velocitat absoluta $u - c$. Invertint el sentit, és a dir, comptant l'aiguaflux absolut positivament en el sentit de la propagació, escriurem:

$$(c - u)dy \,.$$

En el primer cas la vertical té per equació $x = \text{const.}$; en el segon, X és constant i $x = X + ct$. Sigui com vulgui, l'aiguaflux total resulta integrant respecte a y des del fons fins al perfil lliure l.

Per la (4), al llarg de qualsevol vertical $udy = d\psi$, i, per tant, l'aiguaflux relatiu és q, com ja s'havia establert. L'aiguaflux absolut en el sentit de propagació serà

$$Q = \int (c - u)dy = cy_l - q$$

No cal dir que y_l és l'ordenada del perfil lliure corresponent a la secció considerada.

Serà anomenat *profund* un punt o tros de canal que estigui sempre aigua endins, és a dir, sota la mínima ordenada de la superfície lliure. Si dy és un element de vertical *fixa*, serà anomenada *característica de massa* la circumstància que la quantitat d'aigua m que passa a través de dy durant un interval de temps (t_1, t_2) tan llarg com es vulgui, és sempre finita. La relació entre aquesta quantitat i el temps o interval $t_2 - t_1$, és a dir, el valor mig de l'aiguaflux tendirà a zero en créixer l'esmentat interval sense límit.

Si m és positiu en el sentit de propagació,

$$m = dy \int_{t_1}^{t_2} (c - u) \, dt \; [1] \,.$$

1. Observi's com, en atribuir a un element vertical dy l'aiguaflux $dy\,(c - u)dt$ per a tots els dt de $t_2 - t_1$, es fa ús de la hipòtesis que l'element sigui profund. Si per un cert temps l'element quedés en eixut, fóra necessari substituir zero a $dy(c - u)dt$ per tota la durada d'estar en eixut.

La u sota del signe, per ser referida als eixos mòbils, depèn, com hem vist ja, exclusivament de x, y.

En la integració respecte de t, l'argument x s'ha de considerar substituït per $X + ct$, amb X fix.

Siguin x_1, x_2 els valors de x que corresponen a t_1, t_2 (abscisses de la vertical fixa respecte dels eixos mòbils en aquests dos instants). Introduint x en lloc de t com a variable d'integració, i recordant que $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, resulta

$$m = \frac{dy}{c} \left\{ c(x_2 - x_1) - \left[\varphi(x_2, y) - \varphi(x_1, y) \right] \right\}.$$

La circumstància que m ha de romandre finita qualsevol que siguin t_1, t_2, i, per tant, x_1, x_2, equival a aquesta: Que la funció

$$(6) \qquad \Phi(x, y) = \varphi(x, y) - cx$$

es mantingui finita quan x creix indefinidament per tots els valors de y inferiors a l'ordenada mínima de l. I d'aquesta última restricció se'n pot prescindir, quedant en definitiva que $\Phi(x, y)$ *resta finita fins en l'infinit inclusiu, en tot el camp* L *del moviment.*

Per justificar-ho observi's, com en el cas de $\psi(x, y)$, que un punt qualsevol de L pot ser aconseguit des d'un altre punt profund (allà dèiem des del fons) per un desplaçament vertical finit inferior a l'ordenada màxima del perfil lliure. La diferència entre els valors de Φ en els dos punts no pot excedir el producte de la diferència de nivell pel límit superior de

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| = |v|,$$

que és finita.

La (6), essent $\Phi(x, y)$ finita, es manté finita també en l'infinit, i això demostra que φ es fa infinita com cx.

Tinguem present que, en tot el camp L, la velocitat relativa $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ és sempre major que zero, i fins major que una certa constant positiva. Per altra part, si s és l'arc d'una línia de flux o de corrent, comptat positivament en el sentit del moure's l'aigua, la definició de la línia porta a què

$$\frac{dx}{ds} = \frac{u}{V}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{v}{V}.$$

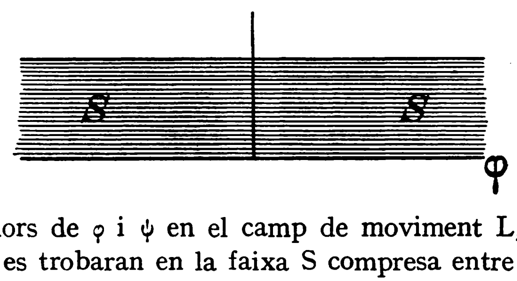
És a dir, al llarg d'una línia de corrent, per la (3),

$$\frac{d\varphi}{ds} = V.$$

Això demostra que φ creix constantment amb s; mes s (per l'expressió de $\frac{dx}{ds}$, així com per mantenir-se u sempre positiu) creix constantment amb x des de $-\infty$ a $+\infty$. I amb això queda demostrat que, *al llarg de tota línia de corrent, i en particular en el fons i en el perfil* l, *la* φ *creix constantment amb* x *de* $-\infty$ *á* $+\infty$.

6. CONSEQÜÈNCIES ANALÍTIQUES. PLA *f*.

Resulta del que queda establert fins ara que, si en un pla i amb coordenades cartesianes φ, ψ es representen



les valors de φ i ψ en el camp de moviment L, aquestes valors es trobaran en la faixa S compresa entre les rectes

$\psi = o$ i $\psi = q$. Això no diu encara que entre el punt x, y de L i el punt φ, ψ de S hi hagi correspondència biunívoca, és a dir, de tots els punts de L a tots els de S i cada un una sola vegada. Però és fàcil veure que així és, efectivament, referint-se a les (3) i (4), així com a una proposició general de la representació conforme.

Posant

$$(7) \qquad \begin{cases} x + iy = z \\ \varphi + i\psi = f, \\ u - iv = w, \end{cases}$$

les (3) i (4) queden compendiades en la

$$(8) \qquad df = wdz,$$

amb la qual cosa queda demostrat que f és una funció monògena de la variable complexa z, la derivada de la qual és la funció, també monògena, w Aquesta, pel que s'ha dit a propòsit de u i v, és regular en el camp L del pla xy, o sia de z, essent finit fins en l'infinit.

Demés,

$$|w|^2 = u^2 + v^2 = V^2$$

no baixa mai sota d'un cert límit inferior $> o$.

Com que $\left|\dfrac{df}{dz}\right| = |w|$ frueix de la mateixa propietat, i entre els contorns de les dues faixes L, S (fons i l en el pla z, $\psi = o$, $\psi = q$ en el pla f) hi ha correspondència biunívoca, segons les al·legades proposicions hi ha correspondència biunívoca i conforme entre L i S. Amb això, tota funció de la variable complexa z, uniforme i regular en el camp L del moviment, es pot del mateix mode considerar com funció de f, uniforme i regular en S. Adoptant aquest punt de vista fixarem des d'ara en endavant l'atenció en la funció $w(f) = u - iv$; ella és finita en l'infinit, en S, perquè ho era en L; és real en l'eix real $\psi = o$, perquè en el fons $v = o$. Si fos coneguda $w(f)$, la resolució completa del problema hidrodinàmic sota la forma euleriana, és a dir, el coneixement de $w(z)$, resultaria d'una sola quadratura seguida d'eliminació.

En efecte, la (8) escrita en altre forma, dóna

$$dz = \frac{df}{w},$$

determinant $z(f)$ amb una quadratura, i podent-se fixar la constant per ser $z = o$ per $f = o$. Invertint i substituint es té $w(z)$.

El canvi de variable independent de z a f és aconsellable perquè la forma del camp L de variabilitat de la z no és determinada *a priori*, sinó que depèn de la línia lliure l, mentre que el camp S de f és una faixa de vores rectes compresa entre l'eix real $\psi = o$ i la paral·lela $\psi = q$ en el semiplà positiu.

Observi's que, si

$$\text{(9)} \qquad F = f - cz$$

i z es considera funció de f, l'expressió anterior defineix una funció de la variable complexa f, regular en S (per ser-ho f i z); mes, a diferència de f i z, finita en l'infinit. Per provar-ho examinarem per separat la part real i el coeficient de la part imaginària, que són, respectivament, $\varphi - cx$, que és la funció Φ definida per (6), i $\Psi = \psi - cy$. La Φ sabem que es conserva finita, com a funció dels punts x, y de L fins en punts a l'infinit. El mateix pot dir-se de Ψ perquè ψ i y són finites dins L. Passant de L a S queda demostrada la proposició.

7. RELACIÓ GLOBAL. EXISTÈNCIA NECESSÀRIA D'UN TRANSPORT SUPERFICIAL.

Tenim ja ara recollides les dades cinemàtiques, i sintetitzades a posta en escasses premisses de la teoria de funcions analítiques. Abans d'examinar la part dinàmica arribant en definitiva a l'equació funcional, que és el nervi de la qüestió, em permetré assenyalar encara algunes conseqüències de la hipòtesi. Faci's referència a l'expressió del flux a través d'una secció fixa del canal durant un interval $t_1, - t_2$.

L'aiguaflux per unitat de temps Q és, com se sap,

$$Q = \int_0^{y_l} (c - u)\, dy = c y_l - q\,;$$

en què y_l és l'ordenada del perfil lliure. Multiplicant per dt, i integrant entre les valors extremes de l'interval, resultarà el flux total M. Observi's que Q (de la mateixa manera que u i dy) depèn de t solament per $x = X + ct$, per ço que, fent ús de la mateixa transformació que en l'examen del cas d'un element profund, tindrem

$$M = \frac{1}{c}\int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^{y_l} (c - u)\; dy = \int_{x_1}^{x_2} y_l\, dx - \frac{q}{c}\,(x_2 - x_1)\,.$$

La primera expressió de M, anomenant L′ la porció del camp L compresa entre x_1 i x_2, i posant $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ en lloc de u, es pot escriure en la forma

$$M = \int_{L'} \left(1 - \frac{1}{c}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dL\,. \tag{10}$$

Fixant-nos ara en la correspondència biunívoca entre les dues faixes L i S, diem S′ a la part de S que correspon a L′, i observem que la correspondència estableix una representació conforme entre els dos camps, el mòdul dels quals és $\left|\frac{dz}{df}\right|$ (relació entre un element $|dz|$ i el corresponent $|df|$).

Si dL i dS són dues àrees corresponents, se tindrà

$$dL = \left|\frac{dz}{df}\right|^2 dS\,,$$

en la que z es pot considerar funció de f o viceversa segons (9). S'entendrà sempre que F va expressada en funció de f, inclús en la (9), en el cas de considerar-se z funció de f. Viceversa, en cas de considerar-se f com a funció de z, la F se suposarà com funció de z.

De la identitat

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{\dfrac{dz}{df}}\,,$$

i en virtut de les dues primeres (7), es dedueix, igualant les parts reals,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{1}{\left|\dfrac{dz}{df}\right|^2}\,.$$

Així, la (10), adoptant com a variables d'integració φ i ψ en lloc de x i y, es fa

$$(10') \qquad M = \int_{S'}\left\{\left|\frac{dz}{df}\right|^2 - \frac{1}{c}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right\} dS\,.$$

De (9), atesa la monogeneïtat de

$$F(f) = F(\varphi + i\psi) = \Phi + i\Psi\,,$$

resulta

$$(9') \quad \frac{dz}{df} = \frac{1}{c} - \frac{1}{c}\frac{dF}{df} = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) - \frac{i}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi};$$

i de on:

$$\left|\frac{dz}{df}\right|^2 = \frac{1}{c^2}\left(1 - 2\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{c^2}\left|\frac{dF}{df}\right|^2.$$

Considerant F com a funció de f per intermedi de z, i observant que per (9) i (8)

$$\frac{dF}{dz} = \frac{df}{dz} - c = w - c,$$

i recordant que ha estat designada per β la fracció $\frac{V_a}{c} = \frac{|w - c|}{c}$, podrà escriure's

$$\left|\frac{dz}{df}\right|^2 = \frac{1}{c^2}\left(1 - 2\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) + \beta^2\left|\frac{dz}{df}\right|^2.$$

La (9'), igualant les parts reals d'ambdós membres, dóna

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right),$$

i, per tant, l'anterior podrà escriure's

$$\left|\frac{dz}{df}\right|^2 - \frac{1}{c}\frac{\partial x}{\partial\varphi} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + \beta^2\left|\frac{dx}{df}\right|^2;$$

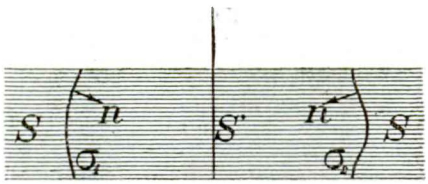
i la (10'), posant-hi

$$N = \frac{1}{c^2}\int\frac{\partial\Phi}{d\varphi}\,dS,$$

adopta la forma definitiva

$$(10'') \qquad M = \int_{L'} \beta^2 dL + N .$$

Observi's que el sumand N es manté finit fins quan L' creix indefinidament. En efecte, el camp S' del pla f



ve limitat per les dues paral·leles $\psi = o$ i $\psi = q$, i per les dues línies transversals σ_1, σ_2, que són les imatges de les verticals $x = x_1$, i $x = x_2$ del pla z. Ara bé : si σ' és el contorn sencer de S' i $d\sigma'$ un element seu, n la direcció de la normal interna a S', aplicant a la definició de N el lema de Green, resulta

$$N = \frac{1}{c^2} \int_{\sigma'} \Phi \cos\,(\widehat{n, \varphi})\, d\sigma'.$$

Mes en les paral·leles $\psi = o$, $\psi = q$, $\cos(\widehat{n\varphi})$ s'anul·la quedant

$$N = \frac{1}{c^2} \int_{\sigma_1 + \sigma_2} \Phi \cos\,(\widehat{n\varphi})\, d\sigma'.$$

L'element $d\sigma'$ d'una de les transversals, i l'element dy de la vertical corresponent, estan entre si en la relació $\left|\frac{df}{dz}\right|$ essencialment finita (igual a la velocitat relativa

$|w| = V$). De la mateixa manera és finita Φ (n.º 5). Si P és, doncs, el producte de l'ordenada màxima de l pel límit superior del mòdul de Φw en tot el camp del moviment, resulta (referint l'integral al pla de la z),

$$N \leq \frac{zP}{c^2}\,.$$

Així queda demostrat que N és finita de qualsevol manera que s'engrandeixi L', o, si es vol, l'interval t_1, t_2.

Reprenent ja la (10''), el primer membre és essencialment positiu, i en general creix indefinidament amb L' (per exemple sempre que $w(z)$ sigui funció periòdica). D'això deriva l'interès de la transformació efectuada que permet afirmar que les ones irrotacionals de tipus permanent, en general, i necessàriament les periòdiques, vénen acompanyades d'un transport global en el sentit de la propagació; transport degut exclusivament a les capes superficials, mentre que per les capes profundes hi ha la característica de massa. Aquesta circumstància depèn de β^2 (vegi's la 10). I per això no pot concloure's de les teories que operen amb la primera aproximació, despreciant els termes de segon ordre en β. Aquest és, precisament, el cas de les ones d'Airy. El primer d'adonar-se, d'una manera quasi experimental, que la segona aproximació per les ones periòdiques porta en si un transport va ser Stokes.

La concomitància del caràcter irrotacional i del transport va ser intuït i enunciat per Lord Rayleigh, com se n'ha fet esment abans d'ara. Mes una demostració matemàtica satisfactòria sembla requerir les especificacions que ens han conduït a la (10''). D'aquesta equació se'n treu una relació interessant entre elements globals, substituint-hi M per l, segona de les expressions indicades inicialment. Dividint-la per $x_2 - x_1$,

$$\frac{1}{x_2 - x_1}\int_{L'} \beta^2 dL + \frac{N}{x_2 - x_1} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} y_l dx - \frac{q}{c}.$$

Entre les hipòtesis que s'han fet al començament figura la de no ésser l molt diversa d'una recta horitzontal $y = h$ (h altura del perfil lliure abans de pertorbació). A la dita hipòtesi atribuirem encara un significat asimptòtic, admetent que el nivell mitjà entre dues seccions, o sia el valor mitjà de l'ordenada y_l

$$\frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} y_l dx ,$$

relatiu a un tros qualsevol de canal, convergeix cap a h en créixer la llargada del tros. Si es tracta d'ones periòdiques, estarà sempre satisfeta, el valor mitjà asimptòtic coincideix amb el valor mitjà corresponent a una ona donada, és a dir, essent h la llargada de l'ona, amb

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} y_l dx .$$

La hipòtesi de l'existència d'un nivell mitjà que he volgut enunciar a causa de rigor matemàtica, és molt plausible físicament, és una característica intuïtiva del moviment per ones.

Havent establert ço que precedeix, considerem encara l'última equació observant que $\frac{N}{x_2 - x_1}$ i el segon membre convergeixen, respectivament, cap als límits o i $h - \frac{q}{c}$

quan l'interval $x_2 - x_1$ creix sense límit. Per tant,

$$\frac{1}{x_2 - x_1}\int_{L'} \beta^2 dL$$

té per límit $h - \frac{q}{c}$, o sia, recordant que $\beta^2 = \frac{V_a^2}{c^2}$ i multiplicant per $\frac{1}{2}c^2$,

$$\lim. \frac{1}{x_2 - x_1}\frac{1}{2}\int_{L'} V_a^2 dL = \frac{1}{2}c^2\left(h - \frac{q}{c}\right).$$

Ara bé : $\frac{1}{2}\int_{L'} V_a^2 dL$ representa l'energia cinètica de moviment per ones, energia localitzada en L′ (per unitat d'amplada del canal). L'equació que acabem d'obtenir mostra que hi ha un valor mitjà asimptòtic τ per a l'energia del moviment per ones, per unitat de llargada i ample del canal i tal que

$$\tau = \frac{1}{2}c^2\left(h - \frac{q}{c}\right). \tag{II}$$

Això és una relació notable entre els elements globals, la qual, en primera aproximació (β^2 despreciable), es redueix a

$$h = \frac{q}{c},$$

que, considerada exacta, portaria a la no existència de transport, com es reconeix immediatament del fet de ser q l'aiguaflux relatiu, que, si fos atribuïble a la translació dels eixos tan solament, valdria ch.

8. EXPRESSIÓ DE LA VELOCITAT MITJANA DE TRANSPORT.

Val la pena de remarcar com $\frac{\tau}{h} = \tau'$ representa el valor mitjà de la densitat d'energia cinètica (energia per unitat de llarg, ample i fons). Per altra part, $\frac{q}{h}$ té un significat global bastant expressiu. És la velocitat segons la qual *sembla* efectuar-se el transport per a l'observador mòbil. Si el transport fos rigurosament nul, hauria de ser $q = ch$. La diferència $\frac{q}{h} - c$ representa la velocitat absoluta del transport material en el sentit positiu Ox : per això l'oposada $c - \frac{q}{h} = \gamma$ ***mesura precisament la velocitat mitjana del transport global en sentit de la propagació per ones.***

Dividint els dos nombres de la (11) per $\frac{1}{2} c^2 h$, resulta

$$(11') \qquad \frac{\gamma}{c} = \frac{\tau'}{\frac{1}{2} c^2},$$

que no és menys expressiva que la precedent, i que té l'aventatge de romandre vàlida sense modificació, fins i tot per a canals de profunditat infinita.

9. CONDICIONS DINÀMIQUES. EQUACIÓ FUNCIONAL CARACTERÍSTICA.

Plantejarem, finalment, les condicions que deriven de les lleis de la Mecànica, referint-les als eixos Oxy, que, per estar animats de moviment uniforme, poden ser tractats com a fixos.

Quan les forces són conservadores, les equacions indefinides de la Hidrodinàmica es redueixen a una relació única. Per als líquids en moviment estacionari, és una relació que lliga la velocitat V, el potencial U de les forces i la pressió p. En el cas que considerem, en el qual la densitat és 1, i el potencial $-gy +$ const $= -g(y-h)$, essent h el nivell mitjà, la referida equació és

$$\frac{1}{2}V^2 + g(y-h) + p = \text{const}\,, \tag{12}$$

que ha de ser satisfeta en tot punt del camp L del moviment. Pels punts interiors, en què p no és donada a priori, l'equació defineix p; viceversa, en el perfil lliure l, la pressió p és p_0, és el valor de la pressió atmosfèrica. i la (12) formula una condició al límit, la condició al límit característica del problema:

$$\frac{1}{2}V^2 + g(y_l - h) = \text{const}, \qquad \text{en } l. \tag{13}$$

Sigui f sempre la variable independent per les raons conegudes, la z, o, millor, la w, serà la funció incògnita. La w representa (vectorialment) la velocitat relativa. En el fons ($y = o$, o bé en S, $\psi = o$), la velocitat és horitzontal, i $w = u - iv$ és real, com $z(f)$, per f real.

Aplicant el principi de simetria o de reflexió analítica de Schwarz les funcions així definides, w i z, seran prolongables analíticament sota l'eix real en la faixa S′, imatge especular de S respecte a l'eix de les φ, nova faixa limitada per les rectes $\psi = o$, $\psi = -q$, en la qual les funcions assumiran valors conjugats dels que tenen en S.

O, més precisament, en punts simètrics $\varphi + i\psi$, $\varphi - i\psi$, les z i w tenen valors conjugats. Per tant, els coeficients de la part imaginària y de z, i el mòdul $|w|$ de w en un punt $\varphi + i\psi$ de S o de S', són expressables en la forma:

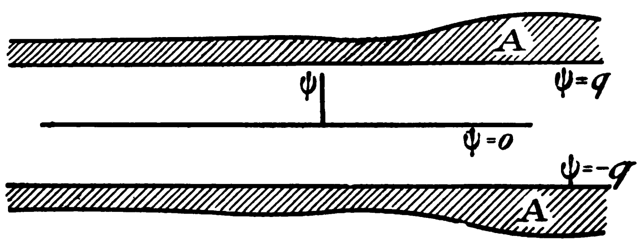
$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2i} \left\{ z(\varphi + i\psi) - z(\varphi - i\psi) \right\}, \\ V^2 = |w|^2 = w(\varphi + i\psi)\, w(\varphi - i\psi) . \end{cases}$$

En el perfil lliure, $\psi = q$, i la (13) es pot escriure:

$$(13') \quad \{w(\varphi + iq)\, w(\varphi - iq)\} - iq \{z(\varphi + iq) - z(\varphi - iq)\} = \text{const.}$$

Convé ara fer intervenir la consideració essencial de tractar-se de funcions analítiques. Les relacions que hem obtingut per a φ real continuen subsistint en tot el camp d'existència de les funcions z, w, que és el mateix per a totes dues.(1) Per tant, es pot escriure f en lloc de φ.

1. Respecte del camp de validesa de l'equació funcional de què es tracta, és d'observar que, si f és un determinat argument del camp, sense sortir-se'n ha de ser possible canviar f en $f + iq$. L'eix real $\psi = 0$ verifica, certament, aquesta condició, i, per a tots els punts que hi pertanyen, la (13') val. Demés, és suficient que el perfil lliure l sigui una línia analítica (o constituïda per segments analítics) perquè $z(f)$, que dóna la representació conforme del pla del moviment en S, sigui prolongable analíticament fora de S més enllà de la recta $\psi = q$ (i, per reflexió, més enllà de la seva imatge $\psi = -q$).



Anomenats A i A' aquests camps addicionals, la validesa de l'equació funcional (E) resta assegurada en zones congruents a A i A' i esteses al llarg de l'eix real.

Derivant respecte a f, s'elimina la constant del segon membre, i, substituint $\frac{1}{w}$ a $\frac{dz}{df}$ s'obté:

$$(\mathrm{E}) \quad \frac{d}{df}\left\{ w(f+iq)\, w(f-iq) \right\} - ig\left\{ \frac{1}{w(f+iq)} - \frac{1}{w(f-iq)} \right\} = 0 .$$

És una equació mixta (diferencial i a diferències finites) que dóna $w(f)$ i sintetitza el problema del moviment permanent per ones. Tot queda reduït a la determinació d'integrals $w(f)$ de (E), reals en l'eix real, regulars en $\psi = q$, $\psi = -q$, finits àdhuc a l'infinit, i tals que la característica de massa quedi satisfeta; i això implica dues coses : 1.ª, que $\frac{w-c}{c}$ sigui de mòdul inferior a una fracció pròpia; 2.ª, que $f - cz$, o sia $f - c\int \frac{df}{w}$, es conservi finita àdhuc a l'infinit.

És fàcil comprovar com, de tot integral $w(f)$ així condicionat, s'obté, en efecte, un moviment per ones de tipus permanent, dotat de tots els requisits que hem anat enumerant. Ometo, per ser curt, aquesta verificació, la qual es troba desenrotllada en la nota *Sulle onde progressive di tipo permanente.*[1]

Solament indicaré una propietat invariant de (E), i és que roman inalterada quan f es canvia per $-f$. De més precisa manera, si es posa

$$w_1(f) = w(-f)$$

i si en (E) f es canvia en $-f$, resulta la mateixa (E) per a w_1.

1. *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, vol. XVI, segon sem. 1907.

10. ONES PERIÒDIQUES. FORMA CORRESPONENT DE L'EQUACIÓ FUNCIONAL.

Ha estat admès que l, el perfil lliure, és una línia poc diversa de l'horitzontal $y = h$: tant el cas d'ones periòdiques, constituïdes per trams que es succeeixen periòdicament, com el d'ones aperiòdiques, ja amb infinites sinuositats que s'amortitzen asimptòticament, ja amb un nombre discret de depressions o inflaments, queden compreses en el tractament general. Un exemple d'aquests últims és l'ona anomenada *solitària*, estudiada experimentalment per Scott-Russel, i teòricament, de manera aproximada, per Boussinesq i Lord Rayleigh.

Ens ocuparem de les ones periòdiques, anomenades oscil·latòries. Ço que les distingeix entre les ones permanents generals és la circumstància que, respecte de l'observador solidari de l, en recórrer un segment λ anomenat llargada d'ona i disposat en la direcció Ox, tant les característiques geomètriques com les cinemàtiques es reprodueixen idènticament. I això equival a dir que $u(x, y)$, $v(x, y)$ són funcions periòdiques de x de període λ, o, en altra forma, que

$$w(z + \lambda) = w(z) \,.$$

Essent $df = w(z)dz$, i w funció periòdica, quan z incrementa de λ, $f(z)$ incrementa en una constant, vgr., ω. Partint d'un valor real de z, i tenint present que f i w són reals en l'eix real, és fàcil veure que ω és real i positiu com λ. I això equival a dir, recordant la correspondència entre el pla z i el pla f, que, a una translació d'amplitud λ en el primer, correspon una translació d'amplitud ω en el segon, una i altra en el sentit positiu de l'eix d'abscisses.

Una funció de z que quedi invariant per tal translla-ció, és a dir, que admeti el període real λ, es transforma quan s'expressa per intermedi de f en una funció periòdica de f amb període real ω, i recíprocament.

La funció (9)

$$F(f) = f - cz$$

és periòdica perquè $F(f)$ és finita dins S (fins a l'infinit). En efecte, $\frac{dF}{df} = 1 - c\frac{dz}{df} = 1 - \frac{c}{w}$ és periòdica, i, per tant, quan f incrementa d'un període, F incrementa d'una constant K:

$$F(f + nw) = F(f) + nK \qquad (n \text{ enter}).$$

Si $K \neq o$, F no podria ser finit per tot valor dins S. Per tant $K = o$ o sia F és periòdica. Amb això, la equació (9), igualant els increments dels dos membres, dóna

$$\omega = c\lambda\,.$$

Aquest és el període de l'argument f.

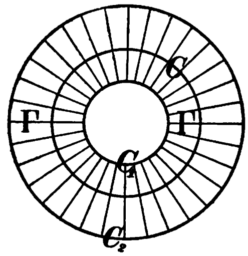
Posant

$$\zeta = e^{\frac{2\pi i f}{c\lambda}}, \tag{14}$$

l'eix real del pla f es transforma en la circumferència C de raig 1 ($|\zeta| = 1$) del pla ζ, i la faixa S, S' limitada per les rectes $\psi = \pm q$, en la corona circular Γ limitada per les dues circumferències C_1 C_2 de raigs

$$R_1 = e^{-\frac{2\pi q}{c\lambda}} \qquad R_2 = e^{\frac{2\pi q}{c\lambda}},$$

menor el primer, i major el segon, que la unitat, així com recíprocs l'un de l'altre.



Quan l'argument f incrementa en $\pm\, iq$, la ζ ve multiplicada per $e^{\mp\alpha}$ havent escrit

$$\text{(15)} \qquad \alpha = \frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{q}{c}\,.$$

És sabut que tota funció $w(f)$, regular en la faixa $\psi = \pm\, q$ i periòdica de període $c\lambda$, en virtut de (14) es converteix en funció de la nova variable ζ, uniforme en la corona. Com que

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{2\pi i}{c\lambda}\, df\,,$$

l'equació funcional (E) es converteix en

$$\text{(E')} \qquad \zeta\,\frac{d}{d\zeta}\left\{ w(e^{-\alpha}\zeta)\; w(e^{\alpha}\zeta) \right\} - \frac{g\lambda}{2\pi}\, c \left\{ \frac{1}{w(e^{-\alpha}\zeta)} - \frac{1}{w(e^{\alpha}\zeta)} \right\} = 0\,.$$

La condició de ser w real en l'eix real, a què ha de satisfer w com a funció de f, es transforma en què : $w(\zeta)$ ha de ser real en la circumferència $C(|\zeta| = 1)$; i la propietat invariant de la (E) pel canvi de f en $-f$ dóna lloc a propietat anàloga per (E') pel canvi de ζ en $\frac{1}{\zeta}$.

II. PRIMERA APROXIMACIÓ. ONES SENZILLES.

L'equació (E') es presta bastant bé a la recerca de solucions aproximades en la hipòtesi que la pertorbació per ones, o, més precisament, la velocitat absoluta $|w-c|$, sigui molt petita al costat de la velocitat de propagació c.

En tal cas convé posar

$$w = c\,(1 + \varepsilon)$$

o

$$\varepsilon = \frac{w - c}{c},$$

essent ε de primer ordre. (La ε és un nombre pur, funció complexa de f, o, si es vol, de ζ.) De conformitat amb això,

$$w(e^{-\alpha}\zeta)\, w(e^{\alpha}\zeta) = c^2 \left\{ 1 + \varepsilon(e^{-\alpha}\zeta) + \varepsilon(e^{\alpha}\zeta) \right\}$$

$$\frac{1}{w(e^{-\alpha}\zeta)} = \frac{1}{c} \left\{ 1 - \varepsilon\,(e^{-\alpha}\zeta) \right\}.$$

La (E') es fa lineal en ε amb la forma

$$(16) \qquad c^2\zeta \frac{d}{d\zeta} \left\{ \varepsilon(e^{\alpha}\zeta) + \varepsilon(e^{-\alpha}\zeta) \right\} - \frac{g\lambda}{2\pi} \left\{ \varepsilon(e^{\alpha}\zeta) - \varepsilon(e^{-\alpha}\zeta) \right\} = 0.$$

Aquesta equació aproximada conserva la propietat invariant de la (E') de romandre sense alteració en canviar ζ per $\frac{1}{\zeta}$. Aquesta és una observació important, perquè permet satisfer fàcilment a la condició imposada a w, i, per tant, a ε, de ser real per $|\zeta| = 1$. Suposem, en efecte, que s'ha trobat una $\varepsilon(\zeta)$ que verifica totes les altres condicions. Serà desenrotllable dins Γ en sèrie de Laurent.

En la hipòtesi que els coeficients del desenrotllament siguin tots reals (circumstància suggerida de la mateixa natura de la cosa, ja que tot és real en (16)), el conjugat de $\varepsilon(\zeta)$ per $|\zeta| = 1$ no és altre que $\varepsilon\left(\frac{1}{\zeta}\right)$. I per això, $\varepsilon(\zeta) + \varepsilon\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ constitueix una nova solució de la (16) real en la circumferència $|\zeta| = 1$.

Provarem de satisfer a (16) amb $\varepsilon(\zeta)$ funció lineal de ζ sense terme constant, vgr., ab $\varepsilon = -\frac{1}{2}\mu\zeta$ essent μ una constant real prou petita. S'arriba a l'equació numèrica

$$c^2(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) - \frac{g\lambda}{2\pi}(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0\,, \tag{17}$$

que relaciona entre elles c, λ i α.

12. EQUACIÓ D'AIRY.

L'equació anterior, és l'equació clàssica d'Airy, que defineix la velocitat de propagació c en funció de λ (llargada d'ona) i h (profunditat del canal). En efecte, recordem que, com a conseqüència d'una relació general entre elements globals, hem reconegut que, en primera aproximació (i tal és el tractament actual),

$$q = ch\,.$$

Així, l'expressió (15) de α es fa

$$\alpha = \frac{2\pi h}{\lambda}\,, \tag{15'}$$

i la (17) pot escriure's

$$(17') \qquad \frac{c^2}{gh} = \frac{1}{\alpha} \mathrm{Tg}h.\alpha \;^{(1)},$$

que és l'equació d'Airy en la forma ordinària.

Com sigui que el segon membre disminueix constantment en créixer α[2] a partir del valor 1 per a $\alpha = o$, la (17'), en virtut de la (15'), expressa que *la velocitat de propagació augmenta amb la llargada d'ona* λ, *essent el límit superior de* c^2 (per $\alpha = o$, o sia $\lambda = \infty$) *el valor* gh.

Aquest valor límit és pràcticament vàlid sempre que pugui despreciar-se α^2, per tant, en virtut de la (15'), per a totes les *ones llargues* tals que λ sigui molt gran respecte de la profunditat del canal, v. gr., 20 vegades, amb la qual cosa, per la (15',) $\alpha^2 < \left(\frac{\pi}{10}\right)^2 < \frac{1}{10}$ poden-se'n prescindir en apreciacions grolleres, i fins sense tals reserves per $\lambda > 70h$, i, així, $\alpha^2 < \frac{1}{100}$

Força llargues són, en general, les ones de marea, i el valor corresponent $\sqrt{gh}$ per a la velocitat de propagació coincideix amb la valor ja trobada per Lagrange en la

1. Amb $\mathrm{Tg}h.\alpha$ es designa la tangent hiperbòlica de α, o sia: $\dfrac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}$. De la mateixa manera, $\mathrm{C}h.\alpha$ i $\mathrm{S}h.\alpha$ designaran el cossinus i sinus hiperbòlics.

2. En efecte, la seva derivada és $-\frac{1}{\alpha^2}\mathrm{Tg}h.\alpha + \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\mathrm{C}h^2.\alpha} = -\frac{1}{\alpha^2 \mathrm{C}h^2.\alpha}\left\{\frac{1}{2}\mathrm{S}h.2\alpha - \alpha\right\}$, i la quantitat entre parèntesis és sempre positiva per α positiva, com es prova, per exemple, substituint a $\frac{1}{2}\mathrm{S}h.2\alpha = \frac{e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}}{4}$ el desenrotllament en sèrie de potències de α: $\frac{1}{2}\left\{2\alpha + \frac{1}{3!}(2\alpha)^3 + \frac{1}{5!}(2\alpha)^5 + \dots\right\}$.

teoria més imperfecta, en la qual es desprecia l'acceleració vertical de les partícules.

Si, pel contrari, α és gran, $\mathrm{T}gh.\alpha$ té el valor asimptòtic 1. La ($15'$) ens diu que és suficient que λ no excedeixi el doble de la profunditat perquè $\mathrm{T}gh.\alpha$ estigui comprès entre $\dfrac{1-e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}}$ i 1, i, per tant, sigui confusible amb la unitat.

Resulta així, per a *ones curtes* (i pràcticament ho són aquelles en què la llargada no excedeix el doble de la fondària),

$$\frac{c^2}{gh} = \frac{1}{\alpha},$$

o sia

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}.$$

13. VALOR EXPLÍCIT DELS DIVERSOS ELEMENTS DEL MOVIMENT.

Examinarem amb més detenció el moviment per ones oscil·latòries corresponent a la solució senzilla

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}\mu\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right),$$

essent ε una constant positiva (petita, però arbitrària).

Amb aquesta forma sabem ja que ε acompleix les condicions volgudes. En primer lloc, reprenent la variable independent f per la (14), i tornant a introduir w,

$$w(f) = c\left(1 - \mu\cos\frac{2\pi f}{c\lambda}\right). \tag{18}$$

Com que la hipòtesi de ser ε de primer ordre fa que també ho sigui μ, es dedueix de l'anterior que

$$(18') \qquad \frac{1}{w} = \frac{1}{c}\left(1 + \mu \cos \frac{2\pi f}{c\lambda}\right) ;$$

i, per tant, essent $dz = \dfrac{df}{w}$, amb la condició $z = o$ per a $f = o$,

$$(19) \qquad z = \frac{f}{c} + \mu \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi f}{c\lambda} .$$

Com que z difereix de $\dfrac{f}{c}$ sols en quantitats de primer ordre, en el segon terme (que ja ho és de primer) podrà ser substituïda z per $\dfrac{f}{c}$, i aleshores tindrem f en funció de z:

$$(19') \qquad f = c \left\{ z - \frac{\mu\lambda}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi z}{\lambda} \right\} .$$

L'equació paramètrica del perfil lliure $\psi = q = ch$ surt de la (19) posant $f = \varphi + ich$, essent φ real. Amb aquesta substitució, separant la part real de la imaginària, i recordant la (15), s'obté

$$x = \frac{\varphi}{c} + \mu \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{Ch}.\alpha \operatorname{sen} \frac{2\pi\varphi}{c\lambda}$$

$$y = h + \mu \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{Sh}.\alpha \cos \frac{2\pi\varphi}{c\lambda} .$$

La primera indica que x difereix de $\dfrac{\varphi}{c}$ en quantitat de primer ordre : per tant, en la segona (en la qual $\dfrac{\varphi}{c}$ figura ja en termes que són de primer ordre) es pot posar

x en lloc de $\frac{\varphi}{c}$, resultant l'equació cartesiana del perfil lliure en forma de sinusoide

$$y = h + a\cos\frac{2\pi x}{\lambda},$$

en la qual la constant

$$a = \mu\frac{\lambda}{2\pi}\,\mathrm{Sh}.\alpha$$

(quantitat petita, però arbitrària a priori, com la μ) representa l'*altura* de les *ones*.

Recordant l'expressió (15') de α, pot donar-se per a l'altura la definició

$$a = \mu h\,\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{Sh}.\alpha. \tag{20}$$

14. OBSERVACIÓ RESPECTE DEL CÀLCUL DE τ'. VALOR DE LA VELOCITAT DE TRANSPORT.

En l'estudi d'aquestes solucions s'ha despreciat sistemàticament els termes de segon ordre, considerant $\frac{w-c}{c}$ com a quantitat de primer ordre.

L'energia cinètica localitzada en un element $d\mathrm{L}$ del canal és

$$\frac{1}{2}c^2\left|\frac{w-c}{c}\right|^2 d\mathrm{L}.$$

La part principal és de segon ordre sempre que la relació $\frac{w-c}{c}$ ho sigui de primer; més és interessant observar que basten els termes de primer ordre en una solució determinada per al càlcul dels termes de segon ordre en la valor de l'energia cinètica. I, per tant, la relació global rigorosa

$$\text{(11')} \qquad \frac{\gamma}{c} = \frac{\tau'}{\frac{1}{2}c^2} ,$$

en la qual τ' és la densitat mitjana de l'energia, ens permet calcular amb la mateixa exactitud (segon ordre inclús) la velocitat de transport γ de les ones sinusoidals.

En tot el curs del càlcul de τ' seran admeses les simplificacions de la primera aproximació, perquè tot terme de τ' és ja de segon ordre, i els errors eventuals resultaran així d'ordre superior.

En aquesta intel·ligència calcularem $\tau' = \frac{\tau}{h}$ partint de l'expressió de l'energia elemental per unitat d'amplada del canal:

$$\frac{1}{2} \left| w - c \right|^2 dL .$$

Per ser $w = \frac{df}{dz}$, resulta de la (9)

$$w - c = \frac{dF}{dz} ,$$

per altra part $F = \Phi + i\Psi$, i per la monogeneïtat,

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y} .$$

El quadrat del mòdul de $w - c$ pot presentar-se, en conseqüència, sota la forma

$$|w - c|^2 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 = \Delta \, \Phi ,$$

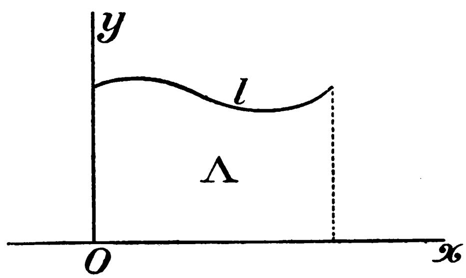
Per un corol·lari del lema de Green, si Λ és un tros qualsevol de L, i s és el contorn que li correspon,

$$\int_{\Lambda} \Delta\Phi dL = - \int_{s} \Phi \frac{d\Phi}{dn} ds \; ;$$

en la qual fórmula dn és un element de normal a s dirigida cap a l'interior del camp.

Per evaluar τ' convé integrar $\frac{1}{2} \Delta\Phi dL$ per a una àrea Λ corresponent a una llargada d'ona λ, i dividir després per λh.

El contorn s de Λ vindrà fet de quatre parts : un fons de llargada λ (entre $x = o$, v. gr., $x = \lambda$); dues línies



congruents (respecte d'una translació d'amplitud λ) que uneixin l'extrem del tram de fons anterior amb el perfil lliure (per a fixar les idees, seran les dues ordenades de l corresponents a les abscisses $x = o$ i $x = \lambda$); finalment, l'arc de l comprès entre les referides ordenades.

Donada la periodicitat de Φ, té aquesta el mateix valor en punts homòlegs de les dues ordenades, i $\frac{d\Phi}{dn}$

valors oposats (perquè dn està sempre dirigit a dins). Per tant, les parts amb què les ordenades contribueixen a l'integral

$$\int \Phi \frac{d\Phi}{dn} ds$$

es destrueixen mútuament. El fons, per altra part, no hi aporta res tampoc, perquè en ell $\frac{d\Phi}{dn} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = o$, per ser $\Phi = \varphi - cx$, i, per tant, $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = v = o$.

D'això en resulta que

$$\tau' = \frac{1}{2\lambda h} \int_{\Lambda} \Delta\Phi d\mathrm{L}$$

queda reduït a

$$\tau' = -\frac{1}{2\lambda h} \int \Phi \frac{d\Phi}{dn} dl ,$$

estès a l, i comprenent una llargada d'ona, de $x = o$ a $x = \lambda$.

Fins aquí el càlcul és rigorós. Per a seguir convé tenir compte de la circumstància que la quantitat sota el signe integral és ja de segon ordre en μ; de manera que, en la integració al llarg de l es pot assimilar aquesta l a l'horitzontal $y = h$, despreciant solament termes de tercer ordre.

Aleshores $dl = dx$, $dn = - dy$, i, per tant,

$$\tau' = \frac{1}{2\lambda h} \int_{o}^{\lambda} \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial y} dx .$$

En aquesta fórmula $\Phi \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}$ ha de referir-se a $y = h$. De les (19′) i (9) es dedueix

$$F = \Phi + i\Psi = -\frac{c\mu}{2\pi}\lambda \operatorname{sen}\frac{2\pi z}{\lambda} .$$

Igualant les parts reals i les imaginàries, i recordant que l'altura val $\dfrac{\mu\lambda}{2\pi}\mathrm{S}h.\alpha$, tal que es pot escriure $\dfrac{a}{\mathrm{S}h.\alpha}$ en lloc de $\dfrac{\mu\lambda}{2\pi}$ resulta:

$$\Phi = -\frac{ca}{\mathrm{S}h.\alpha}\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{\lambda}\,\mathrm{Ch.}\frac{2\pi y}{\lambda} .$$

De la (15′) es desprèn:

$$\left(\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{y=h} = c^2a^2\frac{1}{\mathrm{T}gh.\alpha}\operatorname{sen}^2\frac{2\pi x}{\lambda} .$$

Integrant per tota una llargada d'ona, i recordant l'expressió de τ', resulta:

$$\frac{\tau'}{\frac{1}{2}c^2} = \frac{1}{2\lambda h}a^2\frac{1}{\mathrm{T}gh.\alpha}2\pi = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^2\frac{1}{\mathrm{T}gh.\alpha}\frac{2\pi h}{\lambda} .$$

Per la (15′) altra vegada, i per l'equació d'Airy, s'obté, en definitiva, de la (11′),

$$\text{(21)} \qquad \frac{\gamma}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^2\frac{gh}{c^2} ;$$

ço que demostra com la velocitat mitjana de transport γ, de la qual ja era sabut a priori que és de segon ordre respecte a la velocitat de propagació, ne difereix pel factor de reducció $\left(\frac{a}{h}\right)^2$, que també és de segon ordre, i pel factor finit $\frac{1}{2}\frac{gh}{c^2}$.

15. EXISTÈNCIA DE SOLUCIONS RIGOROSES. INDICACIONS DE LES RECERQUES DE CISOTTI.

Després d'haver deduït l'equació mixta (E′) i d'haver afirmat que és la clau de tota la teoria de les ones periòdiques, ens hem limitat a discutir-ne les solucions de primera aproximació, conegudes, d'altra part, fa ja molt temps. Hom pot preguntar-se, doncs, quin ha estat el progrés que en substància s'hagi aconseguit amb la (E′). La curtària de l'hora no em permet d'entretenir-m'hi llargament. Mes he de declarar d'una manera franca que no he aconseguit fins ara treure de la (E′) ço que creia poder-ne obtenir aplicant la teoria de funcions, és a dir, amb el teorema general d'existència, i, per tant, un algoritme constructiu de solucions rigoroses corresponents a ones de determinada λ i convenient velocitat de propagació c.

És una qüestió d'existència que té importància, i no sols matemàtica o especulativa; mes està encara *sub judice* des del punt de vista físic. Stokes va ser el primer d'estudiar el problema en segona i fins en tercera aproximació, provant de satisfer totes les condicions en la hipòtesi de ser despreciable no sols $\beta^2 = \left(\frac{V_a}{c}\right)^2$, com en la teoria elemental, sinó solament β^3 o β^4; deduint propietats notables conformes amb l'experiència en la part efectivament susceptible de control experimental. D'això en deduïa ell que era evident l'existència d'ones periòdiques que es propaguen sense alterar el tipus, i considerava com a problema de caràcter purament matemàtic la confirmació rigorosa d'aquesta intuïció, o sia la possibilitat d'aplicar sense límit un procés convergent d'aproximacions successives.

Lord Rayleigh, de primer cop, creia molt dubtosa l'existència d'ones periòdiques de tipus permanent, per escrúpols respecte de l'estabilitat; mes en el transcurs de la seva vida es va anar acostant a la impressió contrària a conseqüència dels resultats (aproximats) de Mc. Cowan, així com de l'èxit del mètode dit de dinàmica ignota, de Korteweg i De Vries.

Lord Rayleigh, com és propi dels genis, va callar el motiu de la seva evolució per evitar als estudiosos futurs els dubtes que li eren propis, reprenent ell mateix les recerques de Stokes i apurant-ne l'aproximació.

Mes l'última paraula hauria de ser reservada a l'equació (E'), sobre la qual no puc fer altra cosa, per ara, que un auguri.

Afegiré, solament, que l'equació mateixa s'és mostrada molt convenient per a l'estudi de les aproximacions successives,[1] i que, per altra banda, el Prof. Cisotti,[2] estenent al problema general del moviment per ones *variables* les consideracions desenrotllades aquí per les ones de tipus permanent, ha pogut establir una equació mixta

1. V. U. Crudeli : *Sulle onde progressive di tipo permanente oscillatorie* (*Rend. della R. Acc. dei Lincei*, vol. XXVIII, «segon semestre 1919», pàgs. 174-178; vol. XXIX «segon semestre 1920», pàgs. 174-178, i volum XXIX «segon semestre 1920, pàgs. 265-269).

2. Ibd., vol. XXVII,](segon semestre 1918), pàgs. 255-259, 312-216; vol. XXVIII, (primer semestre 1919), pàgs. 196-199; vol. XXIX (primer semestre 1920), pàgs. 131-133, 175-180, 261-264.

anàloga a la (E) $\left(\text{i contenint } \frac{\partial w}{\partial t}\right)$ ço que, per al cas de petits moviments, li ha servit per a estudiar de manera neta i brillant la propagació per ones en un canal de fondària qualsevol h, i així ha pogut analitzar la influència del fons en les ones, obtenint un progrés considerable sobre les recerques cèlebres de Poisson i Cauchy, aplicables sols al cas de fondària infinita.